ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ ĐỨC HIỆP

THỨ TỰ SẮP ĐƯỢC CỦA DÃY CÁC ĐẠI LƯỢNG TRUNG BÌNH TỔNG QUÁT

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ ĐỨC HIỆP

THỨ TỰ SẮP ĐƯỢC CỦA DÃY CÁC ĐẠI LƯỢNG TRUNG BÌNH TỔNG QUÁT

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60 46 01 13

Người hướng dẫn khoa học
PGS.TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

THÁI NGUYÊN - NĂM 2017

Mục lục

Bảng ký hiệu

$\mathbb{N}^*$	tập các số tự nhiên dương
$I(a, b)$	tập các số thực trong khoảng (a, b)
AG	bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân
APMO	Olympic toán học châu Á Thái Bình Dương
IMO	Olympic toán học quốc tế do Ủy ban Olympic toán học quốc tế tổ chức
MO	Olympic toán học quốc tế

Mở đầu

Bất đẳng thức có vị trí đặc biệt quan trọng trong toán học không chỉ như là những đối tượng để nghiên cứu mà còn đóng vai trò như là một công cụ đắc lực của các mô hình toán học liên tục cũng như các mô hình toán học rời rạc trong lý thuyết phương trình, lý thuyết xấp xỉ, lý thuyết biểu diễn .... Trong hầu hết các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, thi Olympic Toán khu vực và quốc tế, thi Olympic Toán sinh viên giữa các trường đại học và cao đẳng, các bài toán liên quan đến bất đẳng thức hay được đề cập và thường thuộc loại khó hoặc rất khó. Các bài toán về ước lượng và tính giá trị cực trị (cực đại, cực tiểu) của các tổng, tích cũng như các bài toán xác định giới hạn của một số biểu thức cho trước thường có mối quan hệ ít nhiều đến các tính toán, ước lượng (bất đẳng thức) tương ứng.

Trong bất đẳng thức, thứ tự sắp xếp giữa các đại lượng trung bình của bộ số thực dương đóng một vai trò quan trọng trong việc so sánh giá trị giữa các đại lượng trung bình đó. Ngoài thứ tự sắp xếp của một số đại lượng trung bình thông thường như trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hòa... người ta còn quan tâm đến sắp thứ tự dãy các đại lượng trung bình tổng quát.

Mục đích của luận văn nhằm khảo sát các tính chất của dãy các đại lượng trung bình tổng quát và một số dạng toán liên quan.

Nội dung của đề tài luận văn được trình bày trong 3 chương.

Chương 1 "Một số dạng bất đẳng thức giữa các đại lượng trung bình cơ bản": giới thiệu một số dạng bất đẳng thức giữa các đại lượng trung bình cơ bản và một số dạng bất đẳng thức cổ điển.

Chương 2 "Sắp thứ tự dãy các đại lượng trung bình tổng quát": trình bày bài toán sắp thứ tự dãy các đại lượng trung bình tổng quát không có trọng và có trọng.

Chương 3 "Các dạng toán liên quan": xét một số dạng toán liên quan là các bất đẳng thức và các bài toán cực trị từ các đề thi học sinh giỏi và thi Olympic.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học–Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Cô.

Trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường Đại học Khoa học–Đại học Thái Nguyên tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ và động viên của các thầy cô của khoa Toán-Tin và các thầy cô trong trường. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám Hiệu trường THPT Nguyễn Bình, Đông Triều, Quảng Ninh và các anh chị em đồng nghiệp đã tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong thời gian đi học Cao học.

Xin cảm ơn các anh chị học viên lớp Cao học Toán K9C và bạn bè đồng nghiệp đã trao đổi, động viên và khích lệ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn tại trường Đại học Khoa học–Đại học Thái Nguyên.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2017

Tác giả luận văn

Đỗ Đức Hiệp

Chương 1. Một số dạng bất đẳng thức giữa các đại lượng trung bình cơ bản

Chương này giới thiệu một số dạng bất đẳng thức giữa các đại lượng trung bình cơ bản và một số dạng bất đẳng thức cổ điển. Nội dung của chương được viết trên cơ sở các tài liệu [1]–[4].

1.1 Các giá trị trung bình cơ bản

1.1.1 Trung bình thông thường

Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$. Xét tập dãy các số dương

$$(a) := a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n;$$
$$(b) := b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_n.$$

Định nghĩa 1.1.1 Ta nói dãy (a) tỷ lệ với dãy (b) nếu tồn tại hai số λ và μ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\lambda a_i = \mu b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Chú ý rằng dãy không (0), tức là dãy gồm toàn số không, tỷ lệ với mọi dãy (b).

Nhận xét rằng tính tỷ lệ, như đã định nghĩa, là một quan hệ đối xứng giữa các dãy nhưng không phải là một quan hệ bắc cầu; nó sẽ là quan hệ bắc cầu nếu khi khảo sát ta bỏ đi dãy không. Nếu hai dãy (a) và (b) tỷ lệ và cả hai khác dãy không thì $b_i = 0$ nếu $a_i = 0$, còn đối với những giá trị khác của chỉ số i, tỷ số a_i/b_i không phụ thuộc vào i.

Định nghĩa 1.1.2 Xét các số thực $r \neq 0$. Khi đó tổng $\mathcal{M}_r(a)$ xác định theo công thức

$$\mathcal{M}_r(a) := \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^r\Big)^{1/r}. \tag{1.1}$$

được gọi là trung bình bậc r.

Các đại lượng $M_r(a)$ này sẽ được khảo sát chi tiết trong Chương 2.

Đặt

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(a) = \mathcal{M}_1(a) \tag{1.2}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(a) = \mathcal{M}_{-1}(a) \tag{1.3}$$

và

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(a) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}. \tag{1.4}$$

Ta thấy, $\mathcal{A}(a)$ là một trung bình cộng thông thường, $\mathcal{H}(a)$ là một trung bình điều hòa và $\mathcal{G}(a)$ là trung bình nhân.

1.1.2 Trung bình có trọng

Ta xét hệ các giá trị trung bình tổng quát hơn. Đó là các dạng trung bình có trọng. Giả sử

$$p_i > 0 \quad (i = 1, \dots, n) \tag{1.5}$$

và đặt

$$\mathcal{M}_r = \mathcal{M}_r(a) = \mathcal{M}_r(a,p) = \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i^r}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}\right)^{1/r}, \tag{1.6}$$

$$\mathcal{M}_r = 0 \quad (r < 0 \text{ và một số số } a = 0), \tag{1.7}$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(a) = \mathcal{G}(a,p) = \Big(a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}\Big)^{1/\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}. \tag{1.8}$$

Vì trung bình là hàm thuần nhất bậc không đối với p, nên ta có thể giả sử $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Khi đó ta sẽ viết q thay cho p, chẳng hạn

$$\mathcal{M}_r(a) = \mathcal{M}_r(a,p) = \Big(\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^r\Big)^{1/r} \quad \Big(\sum_{i=1}^{n} q_i = 1\Big) \tag{1.9}$$

và

$$\mathcal{G}(a) = \mathcal{G}(a,p) = a_1^{q_1} a_2^{q_2} \dots a_n^{q_n} \quad \Big(\sum_{i=1}^{n} q_i = 1\Big). \tag{1.10}$$

Định nghĩa 1.1.3 Xét các số thực r khác 0. Khi đó tổng $\mathcal{M}_r(a,p)$ xác định theo công thức (1.9) được gọi là trung bình bậc r theo trọng (q).

Nhận xét rằng, ứng với $r = -1$, $r = 1$ và $r = 2$ ta lần lượt nhận được các trung bình điều hòa, trung bình cộng và trung bình bình phương. Ta thấy trung bình có trọng trở thành trung bình thông thường khi $p_i = 1$ với mọi i.

Thông thường, ta không chỉ rõ trọng trong các công thức, nhưng sẽ luôn hiểu rằng những giá trị trung bình được đem ra so sánh với nhau phải cùng được thành lập từ một hệ trọng.

Trung bình thông thường là những trường hợp riêng của trung bình có trọng. Mặt khác, trung bình có trọng với các trọng thông ước là trường hợp riêng của trung bình thông thường (đối với hệ số a khác). Thật vậy, do tính thuần nhất, ta có thể giả sử trọng là nguyên, còn trung bình có trọng nguyên thu được từ trung bình thông thường bằng cách thay mỗi số bằng một hệ các số giống nhau tương ứng. Trung bình với các trọng không thông ước có thể coi như trường hợp giới hạn của trung bình thông thường. Ta sẽ thường xuyên sử dụng các công thức hiển nhiên sau:

$$\mathcal{M}_r(a) = \Big\{\mathcal{A}(a^r)\Big\}^{1/r} \tag{1.11}$$

$$\mathcal{G}(a) = e^{\mathcal{A}(\log a)}, \tag{1.12}$$

$$\mathcal{M}_{-r}(a) = \frac{1}{\mathcal{M}_r(1/a)}, \tag{1.13}$$

$$\mathcal{M}_{rs}(a) = \Big\{\mathcal{M}_s(a^r)\Big\}^{1/r}. \tag{1.14}$$

Trong (1.12) ta giả sử $a > 0$, giả thiết này còn dùng trong các công thức khác nếu chỉ số âm. Thêm nữa

$$\mathcal{A}(a+b) = \mathcal{A}(a) + \mathcal{A}(b), \tag{1.15}$$

$$\mathcal{G}(a,b) = \mathcal{G}(a).\mathcal{G}(b), \tag{1.16}$$

$$\mathcal{M}_r(b) = k\mathcal{M}_r(a) \text{ nếu } (b) = k(a) \tag{1.17}$$

(tức là nếu $b_i = ka_i$ trong đó k không phụ thuộc i).

$$\mathcal{G}(b) = k\mathcal{G}(a) \text{ nếu } (b) = k(a), \tag{1.18}$$

$$\mathcal{M}_r(a) \leq \mathcal{M}_r(b) \text{ nếu } a_\nu \leq b_\nu \text{ với mọi } \nu. \tag{1.19}$$

1.2 Một số dạng bất đẳng thức cổ điển

1.2.1 Định lý về trung bình cộng và trung bình nhân

Định lý 1.2.1 *Ta luôn có* $\mathcal{G}(a) \leq \mathcal{A}(a)$.

Chứng minh. Bất đẳng thức phải chứng minh có thể viết dưới một trong hai dạng sau:

$$a_1^{p_1} \dots a_n^{p_n} \leq \Big(\frac{p_1a_1 + \cdots + p_na_n}{p_1 + \cdots + p_n}\Big)^{p_1+\cdots+p_n} \tag{1.20}$$

hay

$$a_1^{q_1} \dots a_n^{q_n} \leq \sum_{i=1}^n q_ia_i \tag{1.21}$$

(ở đây, $\sum\limits_{i=1}^n q_i = 1$). Ta có

$$a_1a_2 = \Big(\frac{a_1+a_2}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{a_1-a_2}{2}\Big)^2 \leq \Big(\frac{a_1+a_2}{2}\Big)^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2$. Và do đó

$$a_1a_2a_3a_4 \leq \Big(\frac{a_1+a_2}{2}\Big)^2\Big(\frac{a_3+a_4}{2}\Big)^2 \leq \Big(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{2}\Big)^4.$$